

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+x=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x+x$, 则 $g'(x)=x-(a-1)+\frac{a-1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{a-1}{x}}-(a-1)=1-(\sqrt{a-1}-1)^2$. 由于 $1<a<5$, 故 $g'(x)>0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增加, 从而当 $x_1>x_2>0$ 时有 $g(x_1)-g(x_2)>0$, 即 $f(x_1)-f(x_2)+x_1-x_2>0$, 故 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$, 当 $0<x_1<x_2$ 时, 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-1$ 成立.

变式. 设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1<x_2$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $f(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$.

【分析】 这类问题的处理手法和上面稍有不同, 直接处理会发现“此路不通”, 因此要把题目的条件转化, 转化后便可以处理.

解析: (1) 由题设知, 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, +\infty)$, $f'(x)=2x+\frac{a}{1+x}=\frac{2x^2+2x+a}{1+x}$, 且 $f'(x)=0$ 有两个不同的根 x_1, x_2 , 所以 $2x^2+2x+a=0$ 的判别式 $\Delta=4-8a>0$, 即 $a<\frac{1}{2}$, 且 $x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2a}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$, 又 $x_1>-1$ 故 $a>0$. 因此 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$. 结合图像可知, $f(x)$ 在区间 $(-1, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 是增函数, 在区间 (x_1, x_2) 是减函数, 所以函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 . 所以 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$.

(2) 由题设和(1)可知: $x_1+x_2=-2, x_1x_2=a, -\frac{1}{2}<x_2<0$, 因此 $a=-2x_2(1+x_2)$, 于是 $f(x_2)=x_2^2-2x_2(1+x_2)\ln(1+x_2)$, 设函数 $g(t)=t^2-2t(1+t)\ln(1+t)$, 则 $g'(t)=-2t(1+2t)\ln(1+t)$, 当 $t=-\frac{1}{2}$ 时, $g'(t)=0$; 当 $t\in(-\frac{1}{2}, 0)$ 时, $g'(t)>0$, 故 $g(t)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, 0)$ 是增函数, 于是, 当 $t\in(-\frac{1}{2}, 0)$ 时, $g(t)>g(-\frac{1}{2})=\frac{1-2\ln 2}{4}$, 因此 $f(x_2)=g(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$.

【点评】 本题及变式涉及到的是导数中常见的问题, 主要是分类讨论和等价转化的问题, 在这个过程中, 只要把握分类讨论的标准和构造函数的基本类型, 那么一切的问题便“迎刃而解”.

拓展: 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+bx(a>0)$, 且 $f'(1)=0$,

(1) 试用含有 a 的式子表示 b , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 函数图像上的任意两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1<x_2)$, 如果在函数图像上存在点 $M(x_0, y_0)(x_0\in(x_1, x_2))$, 使得 $f(x)$ 在点 M 处的切线 $l\parallel AB$, 则称 AB 存在“相依切线”, 特别地, 当 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时, 则称 AB 存在“中值相依切线”. 请在函数 $f(x)$ 的

图像上是否存在两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1<x_2)$, 使得 AB 存在“中值相依切线”? 若存在, 求出一组 A, B 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【分析】 第(1)问求单调区间是比较容易的, 直接根据条件得出来; 第(2)问属于“新定义”题型, 根据“相依切线”定义得其本质: 利用 A, B 两点间的斜率与 $x_0\in(x_1, x_2)$ 时导数值 $f'(x_0)$ 相等, 建立关于 x_0 的方程, 探究方程是否有根问题 (即在 $x_0\in(x_1, x_2)$ 时, $k_{AB}=f'(x_0)$ 是否有根); 而“中值相依切线”的解决途径则是先假设存在 A, B 两点使得它存在“中值相依切线”, 建立关于 x_1, x_2 的方程 $k_{AB}=f'(x_0)$, 其中 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, 探究方程是否有根. 通过题意可知: 上述问题实际都是通过 A, B 的割线斜率等于切线斜率实现, 但方向不同, “相依切线”是已知曲线上点 A, B 去寻求 $M(x_0, y_0)$ 是否存在, 而“中值相依切线”是已知点 $M(x_0, y_0)$ 去寻求点 A, B 是否存在. 由此可以得到解法.

解析: (1) $f'(x)=\frac{1}{x}-ax+b$, 由 $f'(1)=0$ 可得 $b=a-1$.

(2) 假设函数 $f(x)$ 的图像上存在两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1<x_2)$,

使得 AB 存在“中值相依切线”, 则 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-\frac{a(x_2+x_1)}{2}+a-1, f'(\frac{x_2+x_1}{2})=\frac{2}{x_2+x_1}-\frac{a(x_2+x_1)}{2}+a-1$ 又 $k_{AB}=f'(\frac{x_2+x_1}{2})$ 得 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{2}{x_2+x_1}$, 所以 $\ln \frac{x_2}{x_1}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{1+\frac{x_2}{x_1}}$,

由 $x_2>x_1$ 得 $\frac{x_2}{x_1}>1$, 设 $\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$, 则 $\ln t=2-\frac{4}{t+1}(t>1)$, 则此式表示有大于 1 的实数根. 令 $h(t)=\ln t+\frac{4}{t+1}-2(t>1)$, 则 $h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$, 所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数. 因此 $h(t)>h(1)=0$ 与 $\ln t=2-\frac{4}{t+1}(t>1)$ 有大于 1 的实数根相矛盾, 所以函数 $f(x)$ 的图像上不存在两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)(x_1<x_2)$, 使得 AB 存在“中值相依切线”.

【点评】 本题和今年的高考处理方法也比较类似, 只不过本题是以高等数学背景——拉格朗日中值定理“亮剑出击”, 以导数的几何意义为切入点, 有一定的深度, 也充分考查了考生的能力. 其实本题我们只要根据本题的定义, 用导数的几何意义求出直线的斜率, 再通过构造函数, 利用导数研究函数的单调性和最值, 它的定义实际上是拉格朗日中值定理的变形 (作为考生, 我们也应了解一些以高等数学的背景且与高考息息相关的著名定理, 为了更好让考生了解一下拉格朗日中值定理, 拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 满足如下条件 (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 在开区间 (a, b) 内可导; 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 下面在通过一个小题让考生更深入地了解该定理, 在下列四个函数中, 满